

Exercice 1

Considérons la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < 1$

3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n}$

b- Dédire la monotonie de (u_n) , puis montrer qu'elle est convergente.

4) Posons $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a- Calculer v_0 , et montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

b- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$

c- Calculer v_n en fonction de n , et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{n}{n+1} . \text{ Calculer } \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1- Calculer u_1 et u_2

2- a) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{3 - u_n}$

b) démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < 2$

c) démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 2)^2}{3 - u_n}$

d) déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est convergente.

3- posant $v_n = \frac{1}{2 - u_n} ; \forall n \in \mathbb{N}$

a) calculer $v_{n+1} - v_n$ puis déduire que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$

b) Calculer v_0 puis calculer v_n en fonction de n

c) Dédire que $u_n = 2 - \frac{1}{v_n} ; \forall n \in \mathbb{N}$ puis déduire

$$\text{que } u_n = \frac{2n+1}{n+1} ; \forall n \in \mathbb{N} . \text{ Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2

2. démontrer par récurrence que $u_n > 4 ; \forall n \in \mathbb{N}$

3. a) démontrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{-3}{4}(u_n - 4) ; \forall n \in \mathbb{N}$

b) déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente

4. Posant $v_n = u_n - 4 ; \forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer v_0

b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison

$$q = \frac{1}{4} .$$

c) Calculer v_n en fonction de n puis déduire que

$$u_n = 4 \left(\frac{1}{4} \right)^n + 4 ; \forall n \in \mathbb{N} . \text{ calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

Exercice 4

soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1 - Calculer u_1 et u_2

2 - a) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} + 1 = \frac{2(u_n + 1)}{3 + u_n}$

b) démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > -1$

c) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 1)^2}{3 + u_n}$

b) déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

3 - posant $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} ; \forall n \in \mathbb{N}$

a) calculer v_0

b) calculer $v_{n+1} = \frac{3u_n + 5}{2(u_n + 1)}$

c) démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

d) calculer v_n en fonction de n

4 - a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{-v_n + 2}{v_n - 1}$ puis

dédire que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{-n}{n+2}$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 5

Considérons la suite numérique (U_n) définie par : $u_0 = 6$

et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > \frac{1}{2}$

3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

b- Déduire la monotonie de (u_n) , puis montrer qu'elle est convergente.

c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq 1$, et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

4) Posons $v_n = u_n - \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a- Calculer v_0 , et montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

b- Calculer v_n en fonction de n, et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{1}{2} \left(11 \left(\frac{1}{5} \right)^n + 1 \right)$$

c- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

5) Posons

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ montrer que

$$S_n = \frac{55}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right) + \frac{n}{2}$$

Exercice 6

Considérons la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} \quad ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > \frac{1}{2}$

3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

b- Déduire la monotonie de (u_n) , puis montrer qu'elle est convergente.

c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq 1$, et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

4) Posons $v_n = u_n - \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a- Calculer v_0 , et montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

b- Calculer v_n en fonction de n, et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$$

c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6} \end{cases}$

1. démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 1$

2. démontrer que la suite (u_n) est décroissante puis déduire qu'elle est convergente.

1. posant : $v_n = u_n - 1$

a) démontrer que la suite (v_n) est géométrique à déterminer sa raison

b) Calculer v_n en fonction de n

c) Calculer u_n en fonction de n

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 8

Considérons la suite suivante : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$

1- Calculer u_1 et u_2

2- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$

3- a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n}$

b- Étudier la monotonie de (u_n) et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \leq 2$$

c- Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n \leq 2$

4- Considérons la suite (v_n) tel que $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}; n \in \mathbb{N}$

a- Calculer v_0 et v_1

b- Montrer que (v_n) est arithmétique de raison

$$r = -1 \text{ et déterminer } v_n \text{ en fonction de n.}$$

c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$ et déduire u_n

en fonction de n. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

d- Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$